Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Ιανουάριος 2023

Θέμα 1

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y''' + py'' + qy' + ry = f(t),\ t \in \mathbb{R},\ p,q,r \in \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^+).$$

(i) [1.2] Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα μεταβολής των σταθερών αποκλειστικά για τη διαφορική εξίσωση (E).

(ii) [0.8] Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση (E) για $p = -6, q = 11, r = -6$, και να δοθεί μια έκφραση της λύσης y_0 της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y_0(2) = {y_0}'(2) = {y_0}''(2) = 0.$$

(iii) [0.7] Αν για την συνάρτηση f ισχύει $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 2023$, να εξετασθεί ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθής.

(a) Η λύση y_0 τείνει στο 0, για $t \to +\infty$.

(b) Η λύση y_0 τείνει στο $+\infty$, για $t \to +\infty$.

(c) Κανένα από τα παραπάνω.

Θέμα 2

Θεωρούμε το π.α.τ

$$y' = \frac{1}{4}|x|^{1/2} + |x|^{3/2}y^2,\ y(1) = 0.$$

(i) [0.9] Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων.

(ii) [0.8] Να διατυπωθεί (στη γενικότητά της) η πρόταση που χρησιμοποιήθηκε στο ζήτημα (i).

(iii) [0.8] Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα I^* ορισμού μιας λύσης $\hat{y}$ η οποία προκύπτει από την πρόταση που διατυπώθηκε στο (ii).

(iv) [0.5] Να δοθεί η εκτίμηση της λύσης $\hat{y}$ στο διάστημα I^* που προσδιορίστηκε στο (iii).

Θέμα 3

(i) [1.5] Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0,\ x > -\frac{1}{2},$$

δεδομένου ότι δέχεται μια λύση y_1 της μορφής $y_1(x) = e^{\lambda x},\ x > -\frac{1}{2}$ (λ σταθερά).

(ii) Ας είναι f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα I. Να αποδειχθεί ότι:

(a) [0.5] Αν υπάρχει $x_0 \in I$ με $W(f,g)(x_0) \neq 0$, τότε οι συναρτήσεις f, g είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(b) [0.5] Αν $W(f,g)(x) = 0,\ \forall\, x \in I$, τότε οι f, g δεν είναι αναγκαστικά γραμμικά εξαρτημένες.

(c) [0.5] Αν οι f, g είναι λύσεις ομογενούς γ.δ.ε δεύτερης τάξης με $W(f,g)(x) = 0,\ \forall\, x \in I$, τότε οι f, g είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Θέμα 4

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E_m) \quad xy''(x) + (1-x)y'(x) + my(x) = 0, x > 0, m \in \mathbb{N}\,.$$

(i) [0.8] Να περιγραφεί ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης (E_m) γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

(ii) [1] Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση έχει μία πολυωνυμική λύση $L_m(x), m \in \mathbb{N}$.

(iii) [0.5] Να προσδιοριστεί η πολυωνυμική λύση $L_3(x)$ της εξίσωσης (E_3) (για $m = 3$).

(iv) [0.8] Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία των πολυωνύμων $(L_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι ορθογώνια ως προς μία συνάρτηση βάρους e^{-x} στο διάστημα $[0, +\infty)$.

• **Να δοθούν απαντήσεις σε τρία από τα τέσσερα ερωτήματα του θέματος 4**

Θέμα 5

(i) [1.2] Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z = \operatorname{tg} y$ (ή με διαφορετικό τρόπο), αν y είναι μια λύση του π.α.τ

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} + x \operatorname{tg} y + x \operatorname{tg}^3(y) = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{4},$$

να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

(ii) [0.4] Να υποδειχθεί ένας δεύτερος τρόπος επίπυσης του π.α.τ από αυτόν που χρησιμοποιήθηκε στο ζήτημα (i).

(iii) [0.4] Είναι οι λύσεις που προκύπτουν από τα ζητούμενα (i) και (ii) ταυτόσημες;

(iv) [1] Να επιλυθεί το π.α.τ

$$y''(x) + \frac{1}{4x^2}y(x) = \log x^2 + 1,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 0$$

• **Να δοθούν απαντήσεις σε τέσσερα το πολύ θέματα**
• **Να δοθούν απαντήσεις σε ερωτήματα που αθροίζουν το πολύ 10,5 μονάδες**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ